

VI. Shodná a podobná zobrazení

§1. Zobrazení

Pozn.: S pojmem (binární) relace jsme se seznámili ve druhé kapitole v §12 - každá podmnožina kartézského součinu.

Def.: Necht' A, B jsou dvě podmnožiny. Zobrazením f z množiny A do množiny B nazýváme relaci $f \subseteq A \times B$, pro níž platí: Ke každému $x \in A$ existuje **nejvýše jedno** $y \in B$ tak, že $[x, y] \in f$.

Značení: Je-li $[x, y] \in f$, píšeme také $y = f(x)$.

Prvek $y \in B$ nazýváme obrazem prvku $x \in A$ v zobrazení f . Prvek $x \in A$ nazýváme vzorem prvku $y \in B$ v zobrazení f .

Def.: Necht' $f \subseteq A \times B$ je zobrazení.

Definičním oborem zobrazení f nazýváme množinu $D(f) \subseteq A$ všech prvků $x \in A$ takových, že k nim existuje **právě jedno** $y \in B$ tak, že $y = f(x)$.

$$D(f) = \{x \in A; \exists! y \in B : y = f(x)\}$$

Oborem hodnot zobrazení f nazýváme množinu $H(f) \subseteq B$ všech prvků $y \in B$ takových, že k nim existuje **alespoň jedno** $x \in A$ tak, že $y = f(x)$.

$$H(f) = \{y \in B; \exists x \in A : y = f(x)\}$$

Def.: Necht' f je zobrazení z A do B .

Je-li $D(f) = A$, pak mluvíme o zobrazení množiny A do množiny B a zapisujeme $f : A \rightarrow B$.

Je-li $H(f) = B$, pak mluvíme o zobrazení z množiny A na množinu B .

Je-li $D(f) = A \wedge H(f) = B$, pak mluvíme o zobrazení množiny A na množinu B neboli surjekci.

Je-li $A = B$, pak mluvíme o zobrazení v množině A .

Def.: Necht' f je zobrazení z A do B . Zobrazení f se nazývá prosté, jestliže ke každému $y \in B$ existuje nejvýše jedno $x \in A$ tak, že $y = f(x)$.

Pozn.: Při prostém zobrazení mají tedy dva různé vzory dva různé obrazy.

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{nebo obměna}$$

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Def.: Zobrazení $f : A \rightarrow B$ množiny do množiny, které je prosté, nazýváme injekce.

Zobrazení $f : A \rightarrow B$, které je současně surjekcí a injekcí, nazýváme bijekce.

Pozn.: f je bijekce $\Leftrightarrow$ platí:

1) $D(f) = A$

2) $H(f) = B$

3) f je prosté

Def.: Necht' $\alpha \subseteq A \times B$ je binární relace. Inverzní relací k relaci α nazveme relaci $\alpha^{-1} \subseteq B \times A$ takovou, že $\alpha^{-1} = \{[y, x] \in B \times A : [x, y] \in \alpha\}$. Je-li α zobrazení, nazveme relaci α^{-1} inverzním zobrazením.

Pozn.:

- a) Necht' $f : A \rightarrow B$ je zobrazení z A do B . Pak relace $f^{-1} : B \rightarrow A$ je zobrazení právě tehdy, když f je prosté.
- b) Je-li f bijekce, je f^{-1} bijekce a platí: $D(f^{-1}) = H(f), H(f^{-1}) = D(f)$.

Def.: Necht' $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ jsou zobrazení. Složeným zobrazením h ze zobrazení f a g (v tomto pořadí) nazveme relaci $h \subseteq A \times C$ takovou, že $h = \{[x, z] \in A \times C : \exists y \in B : f(x) = y \wedge g(y) = z\}$.
Značíme $z = g(f(x)), h = g \circ f$ (čteme „ g po f “).

Pozn.:

- a) Skládání zobrazení není komutativní.
- b) Složením dvou bijekcí získáme bijekci.

Def.: Necht' i je zobrazení $i \subseteq A^2$ takové, že každému $x \in A$ platí: $i(x) = x$. Toto zobrazení nazveme identitou.

Pozn.:

- a) Každá identita je bijekce.
- b) Je-li $f : A \rightarrow B$ bijekce, pak i $f^{-1} : B \rightarrow A$ je bijekce a složením těchto zobrazení získáme identitu: $f \circ f^{-1} = i_B \wedge f^{-1} \circ f = i_A$.

§2. Shodná zobrazení

Pozn.: Základní množinou bude množina všech bodů v rovině - E_2 . Budeme tedy zkoumat taková zobrazení Z , kde $D(Z) \subseteq E_2$, $H(Z) \subseteq E_2$.

Def.: Shodným (izometrickým) zobrazením v rovině (shodností v rovině) nazýváme zobrazení $Z : E_2 \rightarrow E_2$, jestliže $\forall X, Y \in E_2: |Z(X)Z(Y)| = |XY|$.

Pozn.:

- Shodné zobrazení zachovává délky.
- Někdy se pojmy shodné zobrazení a shodnost rozlišují. Shodné zobrazení se definuje pro různé bodové množiny E_n, E_m (tedy $Z : E_n \rightarrow E_m$). Je-li $n = m$, mluvíme o shodnosti v množině E_n .
My budeme pracovat s množinou E_2 , proto budeme zkoumat shodnosti v E_2 (i když někdy budeme používat shodná zobrazení v E_2).

V.2.1.: Každé shodné zobrazení je prosté.

[Dk.: sporem: Necht' Z je shodné a není prosté $\Rightarrow \exists X, Y \in E_2: X \neq Y \wedge$
 $\wedge Z(X) = Z(Y) \Rightarrow |Z(X)Z(Y)| = 0.$
Ale z definice plyne $|Z(X)Z(Y)| = |XY| \wedge X \neq Y \Rightarrow |Z(X)Z(Y)| \neq 0$
 $\Rightarrow$ spor] $\Rightarrow$

Pozn.: Dá se ukázat, že každé shodné zobrazení je bijekcí E_2 na E_2 .

Důsledek V.2.1.: Ke každému shodnému zobrazení Z existuje inverzní zobrazení Z^{-1} , které je rovněž shodné.

V.2.2.: Necht' $Z : E_2 \rightarrow E_2$ je shodné zobrazení, AB úsečka. Obrazem úsečky AB v zobrazení Z je úsečka $Z(A)Z(B)$ shodná s AB .

[Dk.: Necht' $X \in AB \Rightarrow |AX| + |XB| = |AB| \Rightarrow |Z(A)Z(X)| + |Z(X)Z(B)| =$
 $= |Z(A)Z(B)| \Rightarrow Z(X) \in Z(A)Z(B).$
Důkaz opačné inkluze provedeme stejnou úvahou pro bijekci Z^{-1} .]

Pozn.:

- Dá se ukázat, že ve shodném zobrazení je obrazem polopřímky polopřímka, přímky přímka, poloroviny polorovina, úhlu shodný úhel, kružnice kružnice,...
- Rovněž platí, že ve shodném zobrazení jsou obrazem rovnoběžných přímek p, q rovnoběžné přímky $Z(p), Z(q)$.

Def.:

- Necht' $Z : E_2 \rightarrow E_2$ je zobrazení, $X \in E_2$ bod.
Bod X nazýváme samodružným (fixním) bodem zobrazení Z , jestliže platí:
 $Z(X) = X$.
- Necht' $Z : E_2 \rightarrow E_2$ je zobrazení, $U \subseteq E_2$ útvar (tj. libovolná podmnožina E_2).
Obrazem útvaru U v zobrazení Z nazýváme útvar $U' = Z(U) =$
 $= \{Y \in E_2: \exists X \in U : Z(X) = Y\}.$

Útvar U nazýváme samodružný v zobrazení Z , jestliže platí: $Z(U) = U$.

Útvar U nazýváme bodově samodružný v zobrazení Z , jestliže $\forall X \in U : Z(X) = X$.

Pozn.: Každý bodově samodružný útvar je samodružný, ale obrácení neplatí.

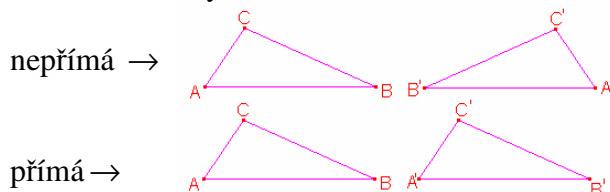
Def.: Necht' $Z : E_2 \rightarrow E_2$ je zobrazení, $p \subseteq E_2$ přímka.

Směr, který určuje přímka p , se nazývá samodružný v zobrazení Z , jestliže platí: $Z(p) \subseteq p$.

Def.: Necht' $Z : E_2 \rightarrow E_2$ je shodnost (shodné zobrazení), ABC trojúhelník.

Shodnost, která nemění smysl obíhání vrcholů $\square ABC$, se nazývá přímá.

Shodnost, která mění smysl obíhání vrcholů $\square ABC$, se nazývá nepřímá.



Def.: Necht' $Z : E_2 \rightarrow E_2$ je zobrazení $I : E_2 \rightarrow E_2$ identita.

Zobrazení Z se nazývá involutorní, jestliže platí: $Z \circ Z = I$.

Pozn.: Pro involutorní zobrazení Z platí: $Z^{-1} = Z$.

V.2.3.: Necht' F, G jsou shodná zobrazení E_2 do E_2 .

Pak také zobrazení $H = G \circ F$ je shodné zobrazení.

[Dk.: Ukážeme, že $\forall X, Y \in E_2 : |XY| = |H(X)H(Y)|$.

$$|H(X)H(Y)| = |G(F(X))G(F(Y))| = |F(X)F(Y)| = |XY| \quad]$$

§3. Klasifikace shodných zobrazení v rovině

A) Identita:

Pozn.: Identitu jsme si definovali v §1.

Pozn.:

- a) Určení: -
- b) Samodružné body: všechny
- c) Samodružné směry: všechny
- d) Přímá shodnost

B) Osová souměrnost:

Def.: Necht' $o \subseteq E_2$ je přímka. Zobrazení $O_o : E_2 \rightarrow E_2$ nazýváme osovou souměrností s osou o , jestliže platí:

1. $X \in o \Rightarrow X' = X$
2. $X \notin o \Rightarrow X' \in p, p \perp o, X \in p : X \dot{-} X' \in o$

Bod X' je obraz bodu X v O_o . Zapisujeme: $X' = O_o(X)$.

V.3.1.: Osová souměrnost je shodné zobrazení.

[Dk.: a) $X \in o, Y \in o : |XY| = |X'Y'|$

b) $X \in o, Y \notin o$: i) $XY \perp o : X = Y \dot{-} Y' \Rightarrow |XY| = |X'Y'|$

ii) $XY \not\perp o : \exists \square XYY', S = Y \dot{-} Y' \Rightarrow$

$\Rightarrow \square XYS \cong \square XY'S$ (sus) $\Rightarrow |XY| = |XY'| = |X'Y'|$

c) $X \notin o, Y \notin o$: obdobně, je nutné uvažovat polohu bodů X, Y vzhledem k ose o : leží-li ve stejné nebo jiné polorovině, je-li $\overline{XY} \cap o$ nebo $\overline{XY} \perp o$.]

Pozn.:

- a) Určení : osa souměrnosti o
- b) Samodružné body: vyplní přímku o
- c) Samodružné směry: dva na sebe kolmé (jeden je určený osou o , druhý přímkou kolmou k o)
- d) Nepřímá shodnost

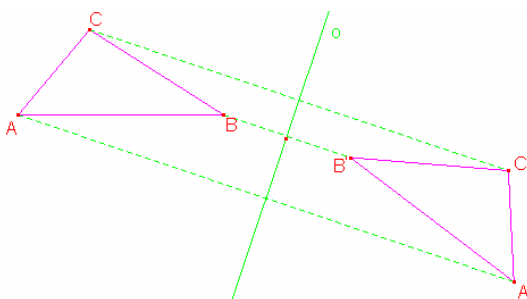
V.3.2.: Osová souměrnost je involutorní zobrazení.

[Dk.: a) $X \in o : O_o \circ O_o(X) = O_o(O_o(X)) = O_o(X) = X = I(X)$

b) $X \notin o : X' = O_o(X) : O_o \circ O_o(X) = O_o(O_o(X)) = O_o(X') = X = I(X)]$

Př.: Zobrazte $\square ABC$ v osově souměrnosti s osou o .

$O_o(\square ABC) = \square A'B'C'$



Pozn.: Přímka $p \subseteq E_2$ se v osové souměrnosti s osou o zobrazuje následovně:

a) $p \sqsubset o \Rightarrow p' \sqsubset o \Rightarrow p' \sqsubset p$

b) $p \not\sqsubset o \Rightarrow$ i) $p \perp o \Rightarrow p' = p$ (p je samodružná přímka, ale není bodově samodružná).

ii) $p \not\sqsubset o \Rightarrow p' \not\sqsubset p \wedge p \cap p' \in o$

Pozn.: Skládání osových souměrností:

a) osy rovnoběžné - $a \sqsubset b$: i) $a=b$: $O_a \circ O_a = I$ - identita

ii) $a \neq b$: $O_b \circ O_a = T$ - posunutí:

$\forall X \in E_2: |XX'| = 2d$, kde $d = \rho(a, b)$.

Složíme-li obě souměrnosti v opačném pořadí, dostaneme posunutí v opačném směru o stejnou délku $2d$.

b) osy různoběžné - $a \not\sqsubset b - a \cap b = \{S\}$: i) $a \perp b$: $O_b \circ O_a = S$ - středová souměrnost

ii) $a \not\perp b$: $O_b \circ O_a = R$ - rotace kolem bodu S

$\forall X \in E_2: |\angle XSX'| = 2\alpha$, kde α je

velikost orientovaného úhlu, který svírají osy a a b .

Složíme-li obě souměrnosti v opačném pořadí, dostaneme rotaci o úhel $-\alpha$.

C) Středová souměrnost:

Def.: Necht' $S \in E_2$ je bod. Zobrazení $S_S : E_2 \rightarrow E_2$ nazýváme středovou souměrností se středem S , jestliže platí:

1. $X = S \Rightarrow X' = X$

2. $X \neq S \Rightarrow S = X \dot{-} X'$

Zapisujeme: $X' = S_S(X)$.

Pozn.: Středová souměrnost se středem S vznikne složením dvou osových souměrností s navzájem kolmými osami, které se protínají v bodě S . Tedy středová souměrnost je shodné zobrazení.

Pozn.:

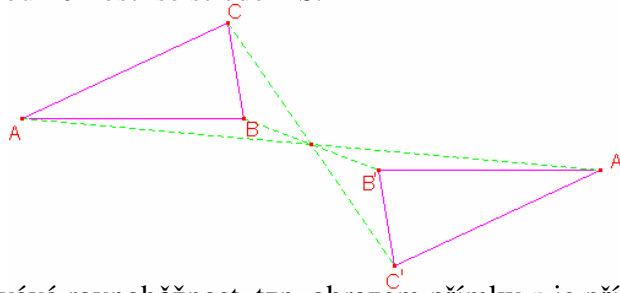
- a) Určení: střed souměrnosti S
- b) Samodružné body: jeden – střed S
- c) Samodružné směry: všechny
- d) Přímá shodnost

V.3.3.: Středová souměrnost je involutorní zobrazení.

[Dk.: a) $X = S : S_S \circ S_S(X) = S_S(S_S(X)) = S_S(X) = X = S = I(X)$

b) $X \neq S : X' = S_S(X) : S_S \circ S_S(X) = S_S(S_S(X)) = S_S(X') = X = I(X)]$

Př.: Zobrazte $\triangle ABC$ ve středové souměrnosti se středem S .
 $S_S(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$



V.3.4.: Středová souměrnost zachovává rovnoběžnost, tzn. obrazem přímky p je přímka p' , kde $p' \parallel p$.

- [Dk.: a) $S \in p : \forall X \in p : X' \in p \Rightarrow p' = p \Rightarrow p' \parallel p$
b) $S \notin p : X, Y \in p, X \neq Y \Rightarrow X' \in p' \wedge Y' \in p' \wedge X' \neq Y'$
Platí: $\angle XYS \cong \angle X'Y'S$ (sus) $\Rightarrow |\angle YXS| = |\angle Y'X'S|$ -úhly střídavé $\Rightarrow p \parallel p'$]

D) Translace (posunutí):

Def.: Zobrazení $T : E_2 \rightarrow E_2$ nazýváme translací (posunutím), jestliže $\forall A, B \in E_2$ platí:
 $\overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{BB'} \wedge \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$. Zapisujeme: $A' = T(A), B' = T(B)$.

Pozn.:

- Posunutí vznikne složením dvou osových souměrností s navzájem rovnoběžnými osami. Tedy posunutí je shodné zobrazení.
- Speciálním případem translace je identita.

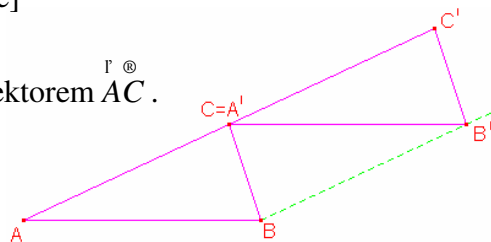
Pozn.:

- Určení: jednou uspořádanou dvojicí bodů A, A' – vzor a jeho obraz. Někdy říkáme, že posunutí je určeno orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AA'}$ nebo vektorem $\overrightarrow{AA'}$, kde A je počáteční a bod A' koncový bod vektoru.
- Samodružné body: žádný (v případě identity všechny)
Samodružnými přímkami jsou ty, které jsou rovnoběžné s vektorem $\overrightarrow{AA'}$
- Samodružné směry: všechny
- Přímá shodnost

V.3.5.: Nechť $T : E_2 \rightarrow E_2$ je posunutí. Pak platí: $\forall A, B \in E_2 : |AA'| = |BB'|$

[Dk.: plyne přímo z definice]

Př.: Zobrazte $\triangle ABC$ v posunutí daném vektorem $\overrightarrow{AC}$.
 $T_{\overrightarrow{AC}}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$



E) Rotace (otočení):

Def.: Necht' $S \in E_2$ je bod, α orientovaný úhel. Zobrazení $R_{S,\alpha} : E_2 \rightarrow E_2$ nazýváme rotací (otočením) se středem S o úhel α , jestliže platí:

1. $X = S \Rightarrow X' = X$
2. $X \neq S \Rightarrow \angle XSX' = \alpha \wedge |XS| = |XS'|$

Zapisujeme: $X' = R_{S,\alpha}(X)$.

Pozn.:

- a) U orientovaného úhlu rozlišujeme počáteční a koncové rameno
- b) Velikost orientovaného úhlu není určena jednoznačně, dvě velikosti téhož úhlu se liší o $k \cdot 360^\circ$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Pozn.:

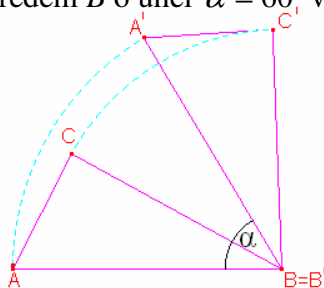
- a) Rotace vznikne složením dvou osových souměrností s navzájem různoběžnými osami. Tedy rotace je shodné zobrazení.
- b) Speciálním případem rotace o úhel 180° , resp. $(2k-1) \cdot 180^\circ$ je středová souměrnost se středem S . Analogicky bychom také mohli říct, že speciálním případem rotace o úhel 360° , resp. $k \cdot 360^\circ$ je identita.

Pozn.:

- a) Určení: střed otočení S a úhel otočení α .
- b) Samodružné body: jeden – střed S
- c) Samodružné směry: žádný (v případě středové souměrnosti všechny)
- d) Přímá shodnost

Př.: Zobrazte $\triangle ABC$ v otočení daném středem B o úhel $\alpha = 60^\circ$ v záporném smyslu.

$$R_{S,-60^\circ}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$$



F) Posunutá souměrnost:

Def.: Necht' $O_o : E_2 \rightarrow E_2$ je osová souměrnost s osou o , $T_{\overline{AA'}} : E_2 \rightarrow E_2$ posunutí dáno

orientovanou úsečkou $\overline{AA'}$. Posunutou souměrností nazýváme zobrazení $T_{\overline{AA'}} \circ O_o : E_2 \rightarrow E_2$. Zapisujeme $X' = T_{\overline{AA'}} \circ O_o(X)$.

Pozn.: Posunutá souměrnost vznikne také složením středové a osové souměrnosti, resp. složením tří osových souměrností. Tedy posunutá souměrnost je shodné zobrazení.

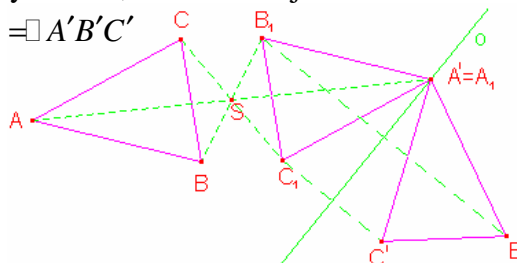
Pozn.:

- Určení: zobrazeními, které máme skládat
- Samodružné body: žádný
- Samodružné směry: dva na sebe kolmé
- Nepřímá shodnost

Př.: Na obrázku jsou dány dva trojúhelníky $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$. Najděte středovou a osovou souměrnost tak, aby $O_o \circ S_s(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$

$$S_s(\triangle ABC) = \triangle A_1 B_1 C_1$$

$$O_o(\triangle A_1 B_1 C_1) = \triangle A'B'C'$$



Pozn.:

- Každé dva shodné útvary v rovině lze vyjádřit právě jedním (pokud neuvažujeme speciální případy) shodným zobrazením uvedeným v podparagrafech A)-F).
- Každé shodné zobrazení v rovině lze vyjádřit složením osových souměrností.

§4. Shodná zobrazení v rovině – konstrukční úlohy

Pozn.: Vlastnosti úsečky XX' spojující vzor a obraz ve shodných zobrazeních:

- osová souměrnost s osou o : $XX' \perp o \wedge X \dot{-} X' \in o$
- středová souměrnost se středem S : $S = X \dot{-} X'$
- posunutí s orientovanou úsečkou $\overset{r}{\circlearrowleft} AA'$: $XX' \parallel AA' \wedge |XX'| = |AA'|$
- otočení se středem S a úhlem $\alpha, \alpha \neq 180^\circ$: XX' je základnou rovnoramenného $\triangle XSX'$, kde $\angle XSX' = \alpha$

Př.:

§5. Podobná zobrazení

Def.: Podobným zobrazením v rovině (podobností v rovině) nazýváme zobrazení $Z: E_2 \rightarrow E_2$, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}^+$ tak, že pro $\forall X, Y \in E_2: |Z(X)Z(Y)| = k \cdot |XY|$. Číslo k nazýváme koeficientem podobného zobrazení (koeficientem podobnosti).

Pozn.:

- a) Každá podobnost je jednoznačně určena číslem k , které lze vyjádřit ze vztahu

$$k = \frac{|X'Y'|}{|XY|}.$$

Pro $k = 1$ dostáváme shodnost ($\Rightarrow$ nevlastní podobnost) (Tedy každé shodné zobrazení je podobné.)

$k \neq 1 \Rightarrow$ vlastní podobnost: $k > 1 \Rightarrow$ zvětšení
 $k < 1 \Rightarrow$ zmenšení

- b) Podobné zobrazení zachovává dělicí poměr bodů.
 c) Někdy se pojmy podobné zobrazení a podobnost rozlišují (viz §2 - shodná zobrazení).

V.5.1.: Každé podobné zobrazení je prosté.

$$\begin{aligned} [\text{Dk.: sporem: } \exists X, Y \in E_2: X \neq Y \wedge Z(X) = Z(Y) \Rightarrow |X'Y'| = 0 \\ |X'Y'| = k \cdot |XY| > 0 \\ \text{ - spor }] \end{aligned}$$

Pozn.: Dá se ukázat, že každé podobné zobrazení je bijekcí E_2 na E_2 .

Důsledek V.5.1.: Ke každému podobnému zobrazení Z existuje inverzní zobrazení Z^{-1} , které je také podobné.

V.5.2.: Necht' Z je podobné zobrazení s koeficientem podobnosti k .

Pak Z^{-1} je též podobné zobrazení s koeficientem podobnosti $k' = \frac{1}{k}$.

$$\begin{aligned} [\text{Dk.: Necht' } Z(X) = A, Z(Y) = B \Rightarrow Z^{-1}(A) = X, Z^{-1}(B) = Y; \\ k' \in \mathbb{R}^+ : |Z^{-1}(A)Z^{-1}(B)| = k' \cdot |AB| \\ |XY| = k' \cdot |X'Y'| = k' \cdot k \cdot |XY| \Leftrightarrow k' \cdot k = 1 \Rightarrow k' = \frac{1}{k}] \end{aligned}$$

Pozn.:

- a) Dá se ukázat, že v každém podobném zobrazení je obrazem úsečky úsečka, obrazem polopřímky polopřímka, přímky přímka, kružnice kružnice, ...
 b) Také obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.

Def.: Necht' $U_1, U_2 \subseteq E_2$ jsou útvary (tj. libovolné podmnožiny E_2). Útvar U_2 nazýváme podobným útvaru U_1 , právě když existuje podobné zobrazení Z takové, že $Z(U_1) = U_2$. Zapisujeme $U_1 \square U_2$.

Pozn.: Platí: $U_1 \sqsubset U_2 \Leftrightarrow U_2 \sqsupset U_1$.

V.5.3.: Nechť Z_1 je podobné zobrazení s koeficientem podobnosti k_1 , Z_2 s koeficientem podobnosti k_2 .

Pak složené zobrazení $Z = Z_2 \circ Z_1$ je podobné zobrazení s koeficientem podobnosti $k = k_1 \cdot k_2$.

Pozn.: Obdobně jako u shodnosti zavádíme pojmy přímá a nepřímá podobnost.

V.5.4.: Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod, nazývaný středem podobnosti.

§6. Stejnolehlost

Def.: Necht' $S \in E_2$ je pevný bod, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ číslo.

Zobrazení $H: E_2 \rightarrow E_2$, $(H_{S,\lambda}: E_2 \rightarrow E_2)$ nazýváme stejnolehlostí (homotetií) se středem S a koeficientem λ , jestliže platí:

1. $X = S \Rightarrow H(X) = S$ (tedy $X' = S$)
2. $X \neq S \Rightarrow |SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$, přičemž
 - a) $\lambda > 0 \Rightarrow X' \in \overset{r}{\circ} SX$
 - b) $\lambda < 0 \Rightarrow S \mu XX'$

Zapisujeme: $X' = H_{S,\lambda}(X)$.

Pozn.:

- a) Pro speciální hodnoty koeficientu λ dostáváme již dříve známé druhy zobrazení:

$\lambda = 1$	identita
$\lambda = -1$	středová souměrnost
- b) $|\lambda| > 1$ zvětšení
 $|\lambda| < 1$ zmenšení

V.6.1.: Stejnolehlost je podobné zobrazení s koeficientem $k = |\lambda|$.

[Dk.: Necht' $H_{S,\lambda} = H; X, Y \in E_2; H(X) = X', H(Y) = Y'$. Ukažme, že

$$|X'Y'| = |\lambda| \cdot |XY|.$$

1. $X = S \Rightarrow X' = S \Rightarrow |X'Y'| = |SY'| = |\lambda| \cdot |SY| = |\lambda| \cdot |XY|$
2. $X \neq S \neq Y \Rightarrow$ a) S, X, Y nekolineární: $\square SXY \square \square SX'Y'$ (sus) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow |X'Y'| = |\lambda| \cdot |XY|.$
 b) S, X, Y kolineární: podle definice sčítání úseček
 $|X'Y'| = |\lambda| \cdot |XY|$]

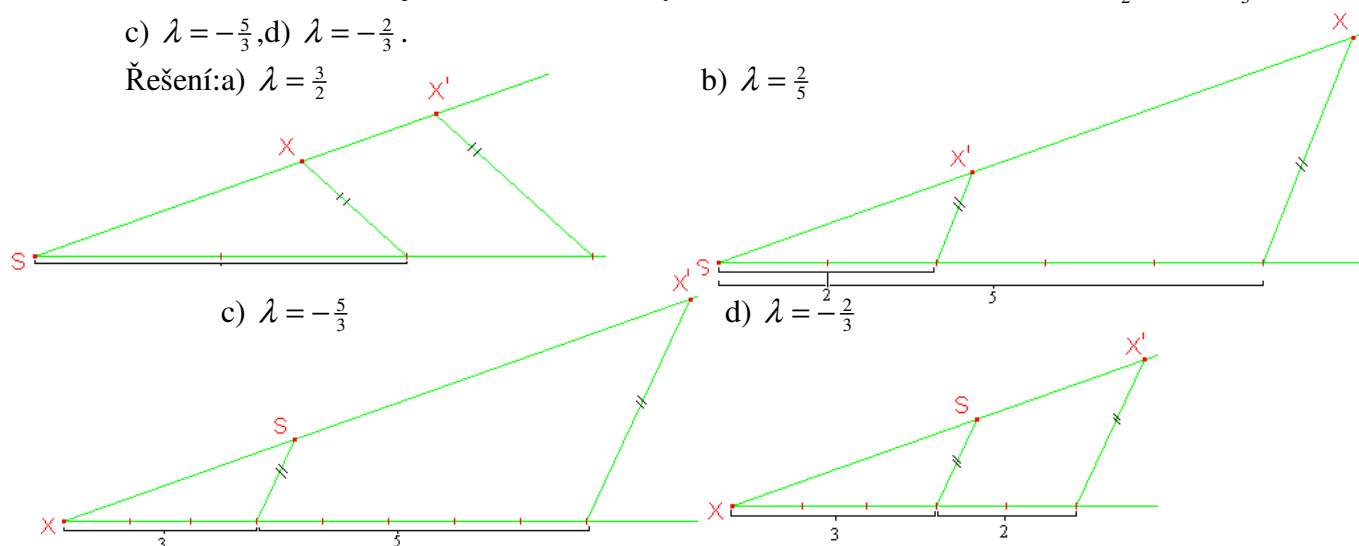
Pozn.:

- a) Určení: střed stejnohlosti S a koeficient stejnohlosti λ . Pro konstrukční účely zpravidla střed stejnohlosti S a jedna dvojice vzor – obraz ($A - A'$)
- b) Samodružné body: jeden – střed stejnohlosti S
- c) Samodružné směry: každý (všechny)
- d) Přímá podobnost

Př.: Zobrazte bod X ve stejnohlosti dané daným bodem S a koeficientem a) $\lambda = \frac{3}{2}$, b) $\lambda = \frac{2}{3}$, c) $\lambda = -\frac{5}{3}$, d) $\lambda = -\frac{2}{3}$.

Řešení: a) $\lambda = \frac{3}{2}$

b) $\lambda = \frac{2}{3}$

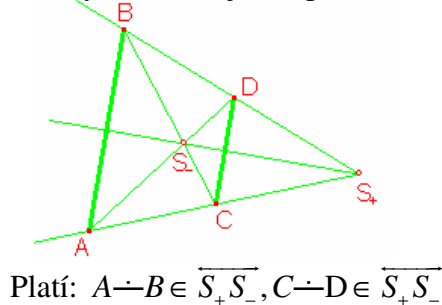


V.6.2.: Stejnolehlost zachovává rovnoběžnost, tzn. obrazem přímky p je přímka p' , kde $p' \parallel p$.

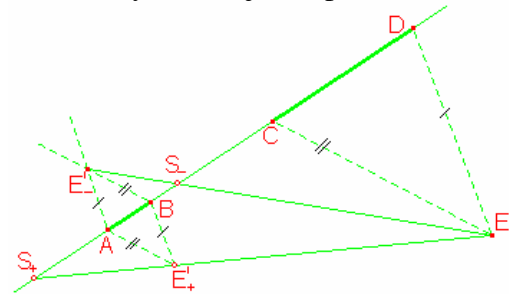
[Dk.: obdoba V.3.4. a V.6.1.]

Pozn.: Stejnolehlost rovnoběžných úseček: Každé dvě rovnoběžné úsečky, které nejsou shodné, jsou stejnohlé dvěma způsoby.

a) úsečky neleží na jedné přímce:



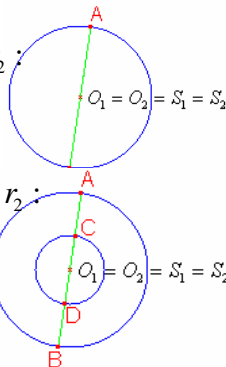
b) úsečky leží na jedné přímce:



Nejdříve musíme sestavit obrazy E'_+, E'_- některého libov. bodu neležícího na této přímce (nejjednodušší doplnit na tři rovnostr. trojúhelníky: $\triangle CDE, \triangle ABE'_+, \triangle ABE'_-$).

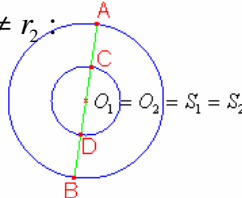
Pozn.: Stejnolehlost kružnic: Každé dvě kružnice, které nejsou shodné, jsou stejnohlé dvěma způsoby:

a) $O_1 = O_2$: i) $r_1 = r_2$:

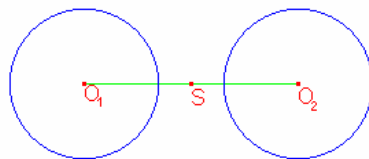


$H_{1S_1, \lambda=1}$	identita	$H_1(A) = A$
$H_{2S_2, \lambda=-1}$	střed souměrnost	$H_2(A) = B$

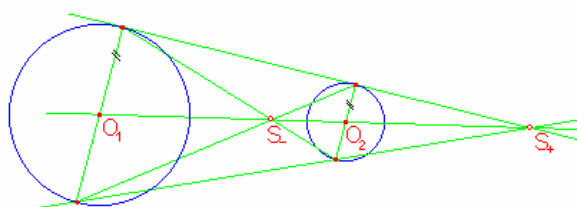
ii) $r_1 \neq r_2$:



b) $O_1 \neq O_2$: i) $r_1 = r_2$:

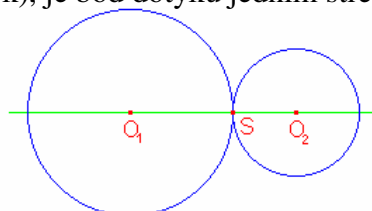


ii) $r_1 \neq r_2$:



Mají-li dvě kružnice společné tečny, pak tyto tečny procházejí středy stejnohlosti. Tečny vedené bodem S_+ jsou vnější, bodem S_- vnitřní.

Pozn.: Dotýkají-li se dvě kružnice (vnější dotyk), je bod dotyku jedním středem stejnohlosti, která převádí jednu kružnici v druhou.



V.6.3.:

- Každé podobné zobrazení v rovině lze vyjádřit jako složení stejnolehlosti a shodnosti (nebo naopak)
- V rovině existují právě tři různé typy vlastní podobnosti: stejnolehlost, podobnost složená ze stejnolehlosti a rotace (přímá podobnost) a podobnost složená ze stejnolehlosti a osově souměrnosti (nepřímá úměrnost).

[Dk.: viz následující příklad]

Př.: Na obrázku jsou dány dva podobné trojúhelníky $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$:

- přímo podobné,
- nepřímo podobné.

Nalezněte:

- stejnolehlost a rotaci,
 - stejnolehlost a osovou souměrnost,
- jimiž se první trojúhelník zobrazí na druhý.

Řešení: a) $H_{S,\lambda}(\triangle ABC) = \triangle A'B_1C_1$ $\lambda = \frac{|SA'|}{|SA|}$

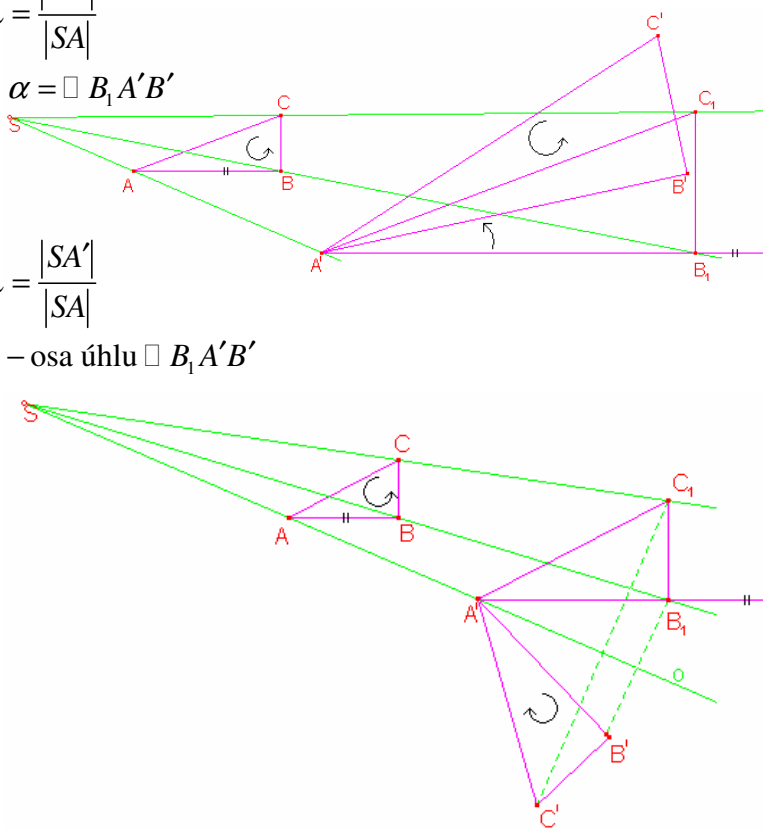
$$R_{A',\alpha}(\triangle A'B_1C_1) = \triangle A'B'C' \quad \alpha = \angle B_1A'B'$$

$$R \circ H(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$$

b) $H_{S,\lambda}(\triangle ABC) = \triangle A'B_1C_1$ $\lambda = \frac{|SA'|}{|SA|}$

$$O_o(\triangle A'B_1C_1) = \triangle A'B'C' \quad o - \text{osa úhlu } \angle B_1A'B'$$

$$O \circ H(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$$



Lze použít i stejnolehlost s $\lambda < 0$ (S je pak mezi trojúhelníky a pomocný $\triangle A'B_1C_1$ je jiný).

§7. Podobná zobrazení v rovině – konstrukční úlohy

Př.: